

Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Beweging over twee lijnen

1 maximumscore 3

- Er moet gelden $-(4 - 4t^2) = 4t$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ 1
- Het eindantwoord $y_P = -2 - 2\sqrt{5}$ (of een vergelijkbare uitdrukking) 1

2 maximumscore 4

- Voor de bewegingsvergelijkingen van P geldt $\frac{dx}{dt} = 16t$ en $\frac{dy}{dt} = -8t$ 1
- $v(t) = \sqrt{(16t)^2 + (-8t)^2} = \sqrt{320t^2}$ 1
- De snelheid van Q is $(\sqrt{3^2 + 4^2} =) 5$ 1
- $\sqrt{320} \cdot (\sqrt{5})^2 = 40$ (dus op $t = \sqrt{5}$ is de snelheid van P acht keer zo groot als de snelheid van Q) 1

3 maximumscore 4

- De helling van lijnstuk PQ is $\frac{4t - 4 + 4t^2}{1 + 3t - 8t^2}$ 1
- $\frac{4t - 4 + 4t^2}{1 + 3t - 8t^2} = \frac{4}{3}$ geeft $3(4t - 4 + 4t^2) = 4(1 + 3t - 8t^2)$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $t^2 = \frac{16}{44}$ 1
- De coördinaten van P zijn $(\frac{128}{44}, \frac{112}{44})$ 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de baan van Q is $\frac{4}{3}$, dus P moet op de baan van Q liggen 1
- P ligt dan op de lijn met vergelijking $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$, dus $4 - 4t^2 = \frac{4}{3} \cdot 8t^2 - \frac{4}{3}$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $t^2 = \frac{16}{44}$ 1
- De coördinaten van P zijn $(\frac{128}{44}, \frac{112}{44})$ 1

Opbrengst van zonnepanelen

4 maximumscore 5

- In driehoek PQR geldt: $\frac{b}{\sin(28^\circ)} = \frac{PR}{\sin(122^\circ)}$ 1
- Hieruit volgt $PR = 1,806... \cdot b$ 1
- $RS' = (b \cos(30^\circ) =) 0,866... \cdot b$ (met S' de loodrechte projectie van S op de lijn door P en R) 1
- Er geldt $1,806... \cdot b + 0,866... \cdot b = 172$ 1
- Dit geeft $b = 64$ (cm) 1

of

- $QQ' = (b \sin(30^\circ) =) 0,5b$ (met Q' de loodrechte projectie van Q op lijnstuk PR) 1
- Hieruit volgt $Q'R = \frac{0,5b}{\tan(28^\circ)} = 0,940... \cdot b$ 1
- $PQ' = (b \cos(30^\circ) =) 0,866... \cdot b$ 1
- Er geldt $0,940... \cdot b + 2 \cdot 0,866... \cdot b = 172$ 1
- Dit geeft $b = 64$ (cm) 1

of

- $QQ' = PQ' \cdot \tan(30^\circ)$ en $QQ' = Q'R \cdot \tan(28^\circ)$ (met Q' de loodrechte projectie van Q op lijnstuk PR) 1
- Hieruit volgt $Q'R = PQ' \cdot 1,085...$ 1
- $Q'R = 172 - 2 \cdot PQ'$, dus $172 - 2 \cdot PQ' = PQ' \cdot 1,085...$ 1
- Hieruit volgt $PQ' = 55,738...$ 1
- $PQ = \frac{55,738...}{\cos(30^\circ)}$, dus $b = 64$ (cm) 1

5 maximumscore 4

- De gegevens invullen geeft het stelsel $\begin{cases} 1,0 = p \cos(9q) + \sin(18q) \\ 2,9 = p \cos(18q) + \sin(36q) \end{cases}$ 1
- Hieruit volgt het stelsel $\begin{cases} p = \frac{1,0 - \sin(18q)}{\cos(9q)} \\ p = \frac{2,9 - \sin(36q)}{\cos(18q)} \end{cases}$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{1,0 - \sin(18q)}{\cos(9q)} = \frac{2,9 - \sin(36q)}{\cos(18q)}$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $q = 0,231$ en $p = -3,804$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

6 maximumscore 5

- Er geldt $\int_{11}^{t_2} -4,8 \cos(0,23t) dt = 18$ 1
- Een primitieve van $-4,8 \cos(0,23t)$ is $-\frac{4,8}{0,23} \cdot \sin(0,23t)$ 1
- Grenzen invullen geeft de vergelijking $-20,86...(\sin(0,23t_2) - \sin(2,53)) = 18$ 1
- Dit geeft $t_2 = 14,930...$ 1
- Het opladen duurt 236 (min) (of 3 uur en 56 minuten) 1

Vierkant en driehoek

7 maximumscore 4

- De coördinaten van P zijn $(p, \ln(3p))$ en de coördinaten van R zijn $(3p, \ln(9p))$ 1
- Er moet gelden $2p = \ln(9p) - \ln(3p)$ 1
- Dus $2p = \ln(3)$ 1
- Hieruit volgt ($p = \frac{1}{2} \ln(3)$ dus) $x_p = 0,55$ en $y_p = 0,50$ 1

8 maximumscore 4

- $\ln(3x) = a$ geeft $x_B = \frac{1}{3}e^a$ 1
 - $f'(x) = \frac{1}{x}$ 1
 - De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $f'\left(\frac{1}{3}e^a\right) = \frac{3}{e^a}$ 1
 - Een exacte toelichting waaruit volgt dat $y_C = a - 1$ (dus $AC = 1$) 1
- of
- $f'(x) = \frac{1}{x}$ 1
 - De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{1}{AB}$ 1
 - De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is ook $\frac{AC}{AB}$ 1
 - Dit geeft $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{AB}$ (dus $AC = 1$) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

9 maximumscore 3

- Gebruik van de stelling van Pythagoras in driehoek ACD geeft

$$AD = \sqrt{1 - L^2} \quad 1$$

- (Omdat $L > 0$ geldt) $\text{Opp}(ACD) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \sqrt{1 - L^2}$ 1

- $\text{Opp}(ACD) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{L^2} \cdot \sqrt{1 - L^2} = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - L^4}$ 1

10 maximumscore 5

- $\frac{d(L^2 - L^4)}{dL} = 2L - 4L^3$ 1

- $\text{Opp}'(ACD) = \frac{2L - 4L^3}{4\sqrt{L^2 - L^4}}$ 1

- $\text{Opp}(ACD)$ is maximaal als $2L - 4L^3 = 0$ 1

- De oppervlakte van driehoek ACD is maximaal voor $L^2 = \frac{1}{2}$ 1

- De maximale oppervlakte is $\frac{1}{4}$ 1

of

- $\text{Opp}(ACD)$ is maximaal als $L^2 - L^4$ maximaal is 1

- $\frac{d(L^2 - L^4)}{dL} = 2L - 4L^3$ 1

- $\text{Opp}(ACD)$ is maximaal als $2L - 4L^3 = 0$ 1

- De oppervlakte van driehoek ACD is maximaal voor $L^2 = \frac{1}{2}$ 1

- De maximale oppervlakte is $\frac{1}{4}$ 1

Twee lijnstukken met eindpunt P

11 maximumscore 3

- Uit $AP = BP$ en $q = 0$ volgt $\sqrt{(p-5)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(p-8)^2 + (0-5)^2}$ 1
- Dit geeft $p^2 - 10p + 41 = p^2 - 16p + 89$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $p = 8$ 1

of

- Het inzicht dat (de x -coördinaat van) het snijpunt van de middelloodlijn van AB met de x -as moet worden bepaald 1
- Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn van AB is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (of: een vergelijking van de middelloodlijn van } AB \text{ is } y = -3x + 24)$$
 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $x_P = 8$ 1

12 maximumscore 6

- $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p-5 \\ q-4 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} p-8 \\ q-5 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-q \\ p-5 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} q-5 \\ 8-p \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4-q \\ p-5 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q-5 \\ 8-p \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ (dus de coördinaten van het midden M zijn onafhankelijk van de positie van punt P) 1

Opmerking

Als in het zesde antwoordelement een vector $\overrightarrow{OM}$ wordt berekend waarbij in één of beide kentallen p en/of q voorkomt, mag voor dit antwoordelement geen scorepunt worden toegekend.

Wortel en sinus

13 maximumscore 7

- Voor de x -coördinaten van de gemeenschappelijke punten geldt $(\sqrt{x} = \sqrt{x + \sin(x)}, \text{ dus } \sin(x) = 0)$ 1
 - Voor de x -coördinaten van de gemeenschappelijke punten geldt $x = k \cdot \pi$ (met $k \geq 0$, k geheel) 1
 - $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 1
 - $\frac{d(x + \sin(x))}{dx} = 1 + \cos(x)$ 1
 - $g'(x) = \frac{1 + \cos(x)}{2\sqrt{x + \sin(x)}}$ 1
 - Voor $k = 2, 4, 6, \dots$ geldt $g'(k \cdot \pi) = \frac{1+1}{2\sqrt{k \cdot \pi + 0}} = \frac{1}{\sqrt{k \cdot \pi}}$ 1
 - $f'(k \cdot \pi) = \frac{1}{2\sqrt{k \cdot \pi}}$, dus voor $k = 2, 4, 6, \dots$ geldt $g'(k \cdot \pi) = 2 \cdot f'(k \cdot \pi)$
(dus dan is de helling van de grafiek van g twee keer zo groot als de helling van de grafiek van f) 1
- of
- Voor de x -coördinaten van de gemeenschappelijke punten geldt $(\sqrt{x} = \sqrt{x + \sin(x)}, \text{ dus } \sin(x) = 0)$ 1
 - Voor de x -coördinaten van $S_2, S_4, S_6, \dots$ geldt $x = k \cdot 2\pi$ (met $k \geq 1$, k geheel) 1
 - $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 1
 - $\frac{d(x + \sin(x))}{dx} = 1 + \cos(x)$ 1
 - $g'(x) = \frac{1 + \cos(x)}{2\sqrt{x + \sin(x)}}$ 1
 - Voor $x = k \cdot 2\pi$ geldt $g'(x) = \frac{1+1}{2\sqrt{x+0}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 1
 - Dus voor $x = k \cdot 2\pi$ geldt $g'(x) = 2 \cdot f'(x)$ (dus dan is de helling van de grafiek van g twee keer zo groot als de helling van de grafiek van f) 1

Drie keer over de lijn

14 maximumscore 5

- Voor $0 \leq x < \sqrt{a}$ geldt $f_a(x) = ax - x^3 + 3x$ 1
- $f_a'(x) = a - 3x^2 + 3$ 1
- Een exacte berekening waarbij uit $f_a'(x) = 0$ volgt dat de x -coördinaat van de top $\sqrt{\frac{1}{3}a+1}$ is 1
- $y_{top} = f_a\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+1}\right) = a\sqrt{\frac{1}{3}a+1} - \left(\sqrt{\frac{1}{3}a+1}\right)^3 + 3\sqrt{\frac{1}{3}a+1}$ 1
- $y_{top} = a\sqrt{\frac{1}{3}a+1} - \left(\frac{1}{3}a+1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a+1} + 3\sqrt{\frac{1}{3}a+1} = \left(\frac{2}{3}a+2\right)\sqrt{\frac{1}{3}a+1}$
 $(= 2\left(\frac{1}{3}a+1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a+1})$ 1

Opmerking

Als wordt gewerkt met $f_a(x) = -ax + x^3 + 3x$, dan mogen voor deze vraag maximaal 3 scorepunten worden toegekend.

15 maximumscore 5

- $f_a(\sqrt{a}) = 3\sqrt{a}$ 1
- Uit $3\sqrt{a} = 16$ volgt $a = \frac{256}{9}$ 1
- $2\left(\frac{1}{3}a+1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a+1} = 2\left(\frac{1}{3}a+1\right)^{\frac{3}{2}}$ 1
- Een exacte berekening waarbij uit $2\left(\frac{1}{3}a+1\right)^{\frac{3}{2}} = 16$ volgt $a = 9$ 1
- Voor $9 < a < \frac{256}{9}$ (of: als a in het interval $\left(9, \frac{256}{9}\right)$ ligt,) (hebben de grafiek van f_a en lijn l drie snijpunten) 1

Vlakdeel en rakende cirkel

16 maximumscore 3

- $x_E = 8,99\dots$ 1
- De inhoud kan worden berekend met

$$\pi \cdot \int_0^{8,99\dots} \left(1\frac{1}{2}x + 4\right)^2 dx - \pi \cdot \int_0^{8,99\dots} \left(\frac{10e^x}{e^x + 1} - x - 1\right)^2 dx$$
 1
- De inhoud is 3212 1

17 maximumscore 3

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{10}{1 + 0} = 10$ 1
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10e^x}{e^x + 1} = \frac{10 \cdot 0}{0 + 1} = 0$ 1
- Een exacte toelichting waaruit de vergelijkingen $y = -x - 1$ en $y = -x + 9$ volgen 1

18 maximumscore 4

- De lijn met vergelijking $y = x$ snijdt de scheve asymptoten in de punten $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ en $(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ 1
- Een exacte toelichting waaruit volgt dat de afstand tussen de scheve asymptoten $\sqrt{50}$ is 1
- De straal van de cirkel is $\frac{1}{2}\sqrt{50}$, dus $y_M = -\frac{1}{2}\sqrt{50}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- M ligt op de lijn met vergelijking $y = -x + 4$, dus $x_M = 4 + \frac{1}{2}\sqrt{50}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- De verticale afstand tussen de scheve asymptoten is 10 1
- Een exacte toelichting waaruit volgt dat de afstand tussen de scheve asymptoten $\frac{10}{\sqrt{2}}$ is 1
- De straal van de cirkel is $\frac{5}{\sqrt{2}}$, dus $y_M = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- M ligt op de lijn met vergelijking $y = -x + 4$, dus $x_M = 4 + \frac{5}{\sqrt{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

Bronvermeldingen

Opbrengst van zonnepanelen

foto [Duurzaamaltrade.nl](https://duurzaamaltrade.nl)

Alle overige figuren Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2025